一种新型混合进制广义级联桥函数系生成算法及其主要性质*

王 钢** 张 军 张其善

北京航空航天大学电子信息工程学院，北京 100083

摘要 提出了一种新的非正弦函数系——混合进制广义级联桥函数系. 与已有桥函数理论的复制信息不同，该函数系通过对混合进制广义复制信息分解成多个码组，不同的码组分别用于复制或者移位操作. 介绍了混合进制广义级联桥函数的复制生成过程之后，讨论了它的主要性质. 混合进制广义级联桥函数是已有桥函数系的进一步推广，包含了许多已有的非正弦正交函数系.

关键词 桥函数 复制 平移

随着数字技术的迅猛发展，非正弦函数的研究与应用也成为一个人们比较关心的问题. Walsh 函数是一种非正弦正交函数，由于它只有两个值＋1 和－1，并且满足正交性，因而在实际中得到广泛应用. Walsh 函数的生成有多种方法，文献[1]在研究 Walsh 函数的排序过程中，发现利用复制方法可以非常简单实用地生成各种排序的 Walsh 函数，关于复制理论的详细介绍可以参见文献[2].

文献[3]在研究 Walsh 函数的复制生成过程中，提出了一种非正弦函数系——桥函数，它通过二进制复制信息和移位结合而产生，并且 Walsh 函数系和方波函数系是它的两个特例. 文献[4]利用桥函数系作为扩频码设计了一种多载波码分多址通信系统，并讨论了它在频率选择性衰落信道下的性能，这种系统可以看作是不使用扩展码的 OFDM 系统和使用 Walsh 码作为扩展码的多载波码分多址通信系统的推广. 利用二进制桥函数系还可以得到其他一些非正弦正交函数系，比如 Har 函数系、Ter 函数系等等.

文献[5]利用 P 进制复制信息，结合 P 进制广义复制方法和移位操作，提出了 P 进制广义桥函数系，并对它的一些基本性质进行了详尽地讨论. 文献[6]利用混合进制复制信息，结合混合进制广义复制方法和移位操作，对桥函数理论做了进一步推广，提出了混合进制广义桥函数系.

已有桥函数理论的提出都是利用不同进制的复制信息. 本文从另外一个角度出发，通过对混合进制广义复制信息分解成多个不同码组，不同的码组分别用于复制操作或者移位操作，从而得到了一类新的非正弦正交函数系. 由于生成过程中，上一步得到的桥函数作为当前操作的初始序列，所以我们把这种桥函数称作级联桥函数系. 级联桥函数系不仅是对已有桥函数系的进一步推广，并且在更大范围里包含了更多的非正弦正交函数系.

1 混合进制广义级联桥函数系的构造过程

由于混合进制广义级联桥函数系是文献[6]的进一步推广，为了节省篇幅，关于混合进制广义 Walsh 函数的定义及其复制生成过程，这里不再介绍，可以参见文献[6]. 在这一节里，我们介绍混合进制广义级联桥函数系的构造过程. 由于复制或移位操作是针对不同码组进行的，这里规定，如果

2006-05-11 收稿，2006-09-27 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号：60532030，10377005，60372018，60625102)

** E-mail：www.wg1973@sina.com

两个连续码组都是执行同一操作，则把这两个码组合并成一个码组，即要求所有相邻码组都是执行不同操作．根据这一规定，可知复制或移位操作是交替进行的，所以混合进制广义级联桥函数系包括两类形式：先复制后移位和先移位后复制．两类桥函数虽然复制和移位操作的顺序不同，但是生成过程是相同的，不失一般性，这里仅就先复制后移位混合进制广义级联桥函数系的复制生成过程加以介绍．

先复制后移位混合进制广义级联桥函数系的构造过程步骤如下：

（1）首先写出序号 k 的 m 位混合（N_{m-1}，N_{m-2}，…，N_2，N_1，N_0）进制自然码

$$k=(n_{m-1}n_{m-2}\cdots n_2n_1n_0),\text{即} k=\sum_{s=0}^{m-1}n_s\Big(\prod_{i=0}^{s-1}N_i\Big),$$

并规定 $\prod_{i=0}^{-1}N_i=1$；这里我们考虑的是前 $N=N_0N_1N_2\cdots N_{m-1}$ 个混合进制广义桥函数系，所以 k 限制在如下范围里：$0\leqslant k\leqslant N-1$．

（2）将序号 k 的 m 位混合（N_{m-1}，N_{m-2}，…，N_2，N_1，N_0）进制自然码分成 p 个码组，这里 $p>2$．每一码组包含的元素个数分别为 i_1，i_2，…，i_p，即：

第1个码组：$n_{m-1}n_{m-2}\cdots n_{m-i_1}$；

第2个码组：$n_{m-i_1-1}n_{m-i_1-2}\cdots n_{m-i_1-i_2}$

$$\vdots$$

第 p 个码组：$n_{i_{p-1}}n_{i_{p-2}}\cdots n_0$

（3）初始序列为1，以第一个码组作为复制信息进行复制操作，过程与文献[6]介绍的混合进制广义 Walsh 函数复制过程相同，这里不再重复，复制结束后得到的序列记作 χ_1．用所得到的复制序列 χ_1 作为原始序列，以第2个码组作为移位信息进行序列移位，移位后的空间用0来填充．

经过 p 个周期的复制和移位操作，最终得到一个 N 个元素的数字序列．这个序列就是序号为 k 的 m 位混合进制自然码排序的先复制后移位混合进制广义级联桥函数系，记作 $HGCB(k,m,p)$ 表示，$HGCB$ 为 Hybrid-P-ary Generalized Concatenated Bridge 的缩写．

这里，我们只介绍了混合进制自然码排序的先复制后移位混合进制广义桥函数系的生成过程．其实，还可以利用混合进制的复制信息的不同排序方式得到更多的混合进制广义桥函数系，比如可以利用混合进制反写码及 Gray 码等排序方式的控制信息构造其他排序方式的混合进制广义桥函数系．由于所有这些方法在本质上与前面介绍的复制生成过程没有差别，这里不再一一阐述．

2 混合进制广义级联桥函数系的主要性质

2.1 先复制后移位混合进制广义级联桥函数系的矩阵表达式

混合进制广义复制方法可以产生一个混合进制广义 Walsh 函数，而 Walsh 函数可以表示成矩阵形式，由此我们可以猜想：对于任意一个二进制级联桥函数系是不是也可以表达成一系列矩阵直积的形式？为了回答这个问题，首先证明下面的定理．

定理1 如果先复制后移位混合进制广义级联桥函数系构造过程中的第 j 个码组采取的是移位操作，则对应于矩阵表达式中相应阶数的单位矩阵，否则对应于矩阵表达式中相应阶数的混合进制广义 Walsh 矩阵，即对于第 j 个码组（$n_{m-(i_1i_2+\cdots+i_{j-1})-1}n_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-2}\cdots n_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-i_j}$），$Z$ 若采取的是移位操作，则对应的单位矩阵阶数等于 $N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-1}\cdot N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-2}\cdots N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-i_j}$；否则对应阶数等于 $N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-1}\cdot N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-2}\cdots N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-i_j}$ 的混合进制广义 Walsh 函数矩阵，并且经过上一节构造出的混合进制广义级联桥函数的个数等于 $N=N_0N_1N_2\cdots N_{m-1}$．

证明 先证明前半部分成立．取序号 k 的 m 位混合（N_{m-1}，N_{m-2}，…，N_2，N_1，N_0）进制自然码，则根据混合进制广义级联桥函数的构造过程可知，桥函数的个数等于 $N=N_0N_1N_2\cdots N_{m-1}$．假设第 j 个码组

$$(n_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-1}n_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-2}\cdots n_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-i_j})$$

采取的是移位操作，根据概率论的知识以及混合进制的定义可知，此码组的 i_j 位二进制码元构成 $N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-1}\cdot N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-2}\cdots N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-i_j}$ 个十进制码元，分别是1，2，…，$N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-1}\cdot$

$N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-2}\cdots N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1}+i_j)}$根据移位操作的定义，这些十进制码元代表初始序列在时隙中的位置，其他位置为零，所以移位操作后得到的序列按矩阵形式排列构成一个单位矩阵，阶数等于$N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-1}\cdot N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-2}\cdots N_{m-(i_1+i_2+\cdots+i_{j-1})-i_j}$.

同理可证定理中的后半部分也成立.

根据混合进制广义级联桥函数系的构造过程，接下来的操作是以当前操作得到的序列作为初始序列的，即以当前操作得到的矩阵中的每一行作为初始序列，所以两个码组之间的操作可以看作是两个码组对应的矩阵之间的直积. 根据直积的定义，两个矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$直积后得到的矩阵$\boldsymbol{C}$阶数等于矩阵$\boldsymbol{A}$的阶数与矩阵$\boldsymbol{B}$阶数的乘积，所以整个构造过程结束后，得到的混合进制广义级联桥函数系的个数等于$N=N_0N_1N_2\cdots N_{m-1}$.

证毕

根据定理1的证明过程，可以很容易得到下面这个定理.

定理2 混合进制广义级联桥函数系矩阵表达式中单位矩阵和混合进制广义Walsh函数矩阵之间的直积顺序与构造过程中移位操作和复制操作之间的顺序有一一对应关系.

根据定理1和定理2，可以得到二进制级联桥函数的矩阵表达式.

定义1 对于序号k的m位混合(N_{m-1}，N_{m-2}，…，N_2，N_1，N_0)进制自然码($n_{m-1}n_{m-2}\cdots n_2n_1n_0$)，将这$m$位二进制码分成$p$个码组，这里$p>2$. 每一码组包含的元素个数分别为$i_1$，$i_2$，…，$i_p$，即：

第1个码组：$n_{m-1}n_{m-2}\cdots n_{m-i_1}$；

第2个码组：$n_{m-i_1-1}n_{m-i_1-2}\cdots n_{m-i_1-i_2}$

⋮

第p个码组：$n_{i_{p-1}}n_{i_{p-2}}\cdots n_0$

则先复制后移位混合进制广义级联桥函数系的矩阵表达式是

$$\boldsymbol{HGCB}(k,m,p)=\begin{cases}\boldsymbol{W}_1\otimes\boldsymbol{I}_2\otimes\boldsymbol{W}_3\otimes\boldsymbol{I}_4\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{W}_{p-1}\otimes\boldsymbol{I}_p & \text{若 } p \text{ 为偶数}\\ \boldsymbol{W}_1\otimes\boldsymbol{I}_2\otimes\boldsymbol{W}_3\otimes\boldsymbol{I}_4\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{I}_{p-1}\otimes\boldsymbol{W}_p & \text{若 } p \text{ 为奇数}\end{cases}$$

同理，先移位后复制混合进制广义级联桥函数系的矩阵表达式是

$$\boldsymbol{HGCB}(k,m,p)=\begin{cases}\boldsymbol{I}_1\otimes\boldsymbol{W}_2\otimes\boldsymbol{I}_3\otimes\boldsymbol{W}_4\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{I}_{p-1}\otimes\boldsymbol{W}_p & \text{若 } p \text{ 为偶数}\\ \boldsymbol{I}_1\otimes\boldsymbol{W}_2\otimes\boldsymbol{I}_3\otimes\boldsymbol{W}_4\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{W}_{p-1}\otimes\boldsymbol{I}_p & \text{若 } p \text{ 为奇数}\end{cases}$$

2.2 先复制后移位混合进制广义级联桥函数系的数学表达式达式

根据上一节的介绍，先复制后移位混合进制广义级联桥函数系的矩阵表达式中Walsh函数矩阵和单位矩阵的位置分别与码组的操作相对应，则利用Walsh函数代替Walsh函数矩阵，方块脉冲函数代替单位矩阵，可以得到先复制后移位混合进制广义级联桥函数系的数学表达式.

定义2 对于序号k的m位混合(N_{m-1}，N_{m-2}，…，N_2，N_1，N_0)进制自然码($n_{m-1}n_{m-2}\cdots n_2n_1n_0$)，将这$m$位二进制码分成$p$个码组，这里$p>2$. 每一码组包含的元素个数分别为$i_1$，$i_2$，…，$i_p$，即：

第1个码组：$n_{m-1}n_{m-2}\cdots n_{m-i_1}$；

第2个码组：$n_{m-i_1-1}n_{m-i_1-2}\cdots n_{m-i_1-i_2}$

⋮

第p个码组：$n_{i_{p-1}}n_{i_{p-2}}\cdots n_0$

则先复制后移位混合进制广义级联桥函数系的数学表达式是

$$\boldsymbol{HGCB}(k,m,p)=\begin{cases}\boldsymbol{Wal}_1\otimes\boldsymbol{Blo}_2\otimes\boldsymbol{Wal}_3\otimes\boldsymbol{Blo}_4\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{Wal}_{p-1}\otimes\boldsymbol{Blo}_p & \text{若 } p \text{ 为偶数}\\ \boldsymbol{Wal}_1\otimes\boldsymbol{Blo}_2\otimes\boldsymbol{Wal}_3\otimes\boldsymbol{Blo}_4\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{Blo}_{p-1}\otimes\boldsymbol{Wal}_p & \text{若 } p \text{ 为奇数}\end{cases}$$

同理，先移位后复制混合进制广义级联桥函数系的数学表达式是

$$HGCB(k,m,p)=\begin{cases} Blo_1 \otimes Wal_2 \otimes Blo_3 \otimes Wal_4 \otimes \cdots \otimes Blo_{p-1} \otimes Wal_p & \text{若 } p \text{ 为偶数} \\ Blo_1 \otimes Wal_2 \otimes Blo_3 \otimes Wal_4 \otimes \cdots \otimes Wal_{p-1} \otimes Blo_p & \text{若 } p \text{ 为奇数} \end{cases}$$

3 结论

本文提出了一种新的非正弦函数系——混合进制广义级联桥函数系，详细介绍了它的复制生成算法及其主要性质. 通过以上讨论，利用多次的复制和平移操作，可以生成不同类型的桥函数. 混合进制广义级联桥函数系是已有桥函数系的进一步推广和完善. 混合进制广义级联桥函数生成过程简单，通过适当选取可以得到具有完全正交特性的非正弦函数系，这使得在图像处理、保密通信等领域中应用成为可能，并作为今后进一步研究的重点.

参考文献

1 Li ZH, Zhang QS. Orthogonal of Walsh functions. IEEE Trans EMC, 1983, 25(2): 115—119

2 张其善，金明录. 信号复制生成理论及应用. 北京：人民邮电出版社，2001

3 Li ZH, Zhang QS. Introduction to bridge functions. IEEE Trans EMC, 1983, 25(4): 459—464

4 Slimane B, Abdullatif G. Multi-carrier CDMA systems using bridge functions. IEEE 51st Vehicular Technology Conference Proceedings, Tokyo, 2000, 1928—1932

5 饶雪芳，张其善. 广义桥函数理论及其应用. 北京：国防工业出版社，1998

6 王 钢，张其善. 一种新型非正弦函数——混合进制广义桥函数的复制生成算法及其主要性质. 中国科学，E辑，2005, 35(10): 1064—1071

(上接第671页)

8. 促进竞争性研究的试验性计划

促进竞争性研究的试验性计划(EPSCoR)投资于战略性计划，其资助地区是过去在联邦研发事业中一直没有成为平等合作伙伴的辖区和州，资助对象是位于这些地区的相关机构，为这些机构提供发展机会. NSF的EPSCoR计划旨在逐步提高这些机构的研究能力，切实全面提高美国的国际竞争力. NSF2008年度将对EPSCoR计划增加7%的投资，使之年度经费达到1.07亿美元.

9. 国际合作

与其他国家建立国际伙伴关系，可以让美国学生、科学家和工程师了解世界各地出现的新概念和新技术，为他们提供在不同国家及文化背景的人共同组成的研究团队中高效开展工作所需的经历. 通过国际科学与工程办公室的工作，NSF将继续支持美国科学家和工程师参与国际合作计划. 2008年度此方面的投入将增加近11%，达到4500万美元.

10. 培养21世纪的劳动力

传统的科学、技术、工程和数学教育没有充分利用通信技术、新概念和工具以及各学科融合的益处. 然而，最近针对NSF数学与科学合作计划(MSP)的分析表明，从小学到中学和高中，参与该计划的学生其数学和科学能力在过去3年的调查时间中得到了提高. 目前MSP项目有望影响到550个地方学校区的14.1万科学和数学教师以及420万学生.

NSF将另外投入900万美元，通过研究生研究奖学金计划，资助200名研究生. 这一长期计划将通过NSF所有学科领域的资助活动，支持攻读研究生学位的最有潜力的个人. 自1952年以来，有超过41000名美国学生获得这一奖学金，2008年度大约有2950个学生会获得该项资助.

贝蒙特主任强调，NSF在2008年将继续改进其内部管理，通过保持组织自身的能力、特别是快速反应能力，提高在科学与工程研究和教育方面的卓越管理水平. 2008年以及今后一段时间的首要目标是，改进价值评议(建立在同行评议基础上)过程的透明度、一致性和规范性. 另外一个目标是，建立政府研究网入口，为获资助者寻求联邦政府资助提供一站式服务的网站. 这一入口也将作为“资助项目业务管理线”的一部分，有助于研究机构与资助机构分享项目管理最佳实践经验的信息.

(供稿：刘 权 龚 旭 编译)